Kommentarer till tentamen dat401 DM 011025

Detta är ingen mönsterlösning.

1a Svar: $d(H) = 1$, $D(H) = 4$.

1c Svar: $p^{n/2}$.

1d Svar: $\binom{n/2}{m}p^m(1-p)^{n/2-m}$. Se [R: Thm. 4.5.1]. Populära fel: $p^m(1-p)^{n/2-m}$ och p^m. Fatal missuppfattning: Uppgiften betyder *inte* 'hitta sannolikheten för att hörn 1 har grad mellan 0 och $n/2$', men 'hitta sannolikheten för att hörn 1 har grad m, där m är ett (konkret) tal mellam 0 och $n/2$'.

1e Svar: $1-(1-p^{n/2})^{n/2}$.

1f Svar: $\frac{1}{4}n^2p(1-p)^{n/2-1}$. Populärt fel: $\frac{1}{2}np(1-p)^{n/2-1}$. Ledning: introducera indikatorvariabeln

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{om } v_i \text{ har grad } 1, \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

1g Svar:

$$\sum_{d=0}^{n/2}\left(\binom{n/2}{d}p^d(1-p)^{n/2-d}\right)^{n/2}.$$

2b Svar: $\left[{2 \atop 6}\right] = 7$, $\left[{6 \atop 2}\right] = 21$. Skriv *inte* $\left[{2 \atop 6}\right] = (6,0),(5,1),(4,2)\ldots$ – godistalet är ingen sekvens.

2c Svar: n. Många svar, som t ex $1^n + n - 1$ kan snyggas til.

2d Elegant svar: $\binom{n}{1}+\binom{n}{2}$, eftersom godisbitarna antingen ges till samma barn, eller fördelas på två barn.

2e Svar för andra identiten: Betrakta de $k+1$ fallen där första barnet får $l = 0, 1, \ldots, k$ godisar. De övriga $k-l$ godisar fördelas på de andra $n-1$ barnen, vilket kan göras på $\left[{n-1 \atop k-l}\right]$ sätt.

3b Svar: $a_n = 2^n + a_{n-1}$ eller $a_n = 2a_{n-1} + 1$, $a_0 = 1$.

3c Svar: $2^{n+1} - 1$. Många studenter har svårigheter att summera $\sum_{i=0}^{n} 2^i$, se [R: Tabel 1.7.2] med $a = 1$.

3e Svar: $b_n = 2^n - b_{n-1}, b_1 = 0$ med lösning $b_n = \frac{1}{3}\big((-1)^n + 2^{n+1}\big)$.